1.29) $P_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $P_2(x) = -x(x-2)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$

a) Verificar que $B = \{P_1, P_2, P_3\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$

La base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ tiene dim. $= 3$, por lo que como B también tiene esa dim. solo resta ver si es LI para ser base.

Voy a ver si es LI con el Wronskiano. Como tiene 3 elem., derivo 2 veces c/u.

~~Reeee~~ Tomo $P(x) = (P_1(x), P_2(x), P_3(x))$

$P_1(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 3x + 2)$

$P_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x - 3)$, $P_1''(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$P_2(x) = -x^2 + 2x$, $P_2'(x) = -2x + 2$, $P_2''(x) = -2$

$P_3(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - x)$, $P_3'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x - 1)$, $P_3''(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Armo matriz del Wronskiano:

$$W(P(x)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x^2-3x+2) & -x^2+2x & \frac{1}{2}(x^2-x) \\ \frac{1}{2}(2x-3) & -2x+2 & \frac{1}{2}(2x-1) \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Pruebo en $x_0 = 0$.

$$W(P(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$ Calculo el det. x cofactores (1° Fila)

$$\rightarrow W(P(0)) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow W(P(0)) = 1.(2-1) = 1 \neq 0.$$

Como el Wronskiano me dio $\neq 0$ para un $x_0 \in D_P$, puedo afirmar que es LI, y por lo tanto es base de $\mathbb{R}_2[x]$ por lo dicho antes.

b) un P genérico de $\mathbb{R}_2[x]$ es de la forma: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Quiero probar que $[P]_B = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{bmatrix}$

Primero calculo $P(0), P(1), P(2)$ para saber cuánto me tiene que dar.

$$\begin{cases} P(0) = a_0 \\ P(1) = a_0 + a_1 + a_2 \\ P(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \end{cases}$$

Planteo p como una CL de B:

$$a_0+a_1x+a_2x^2=\alpha_1\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+1\right)+\alpha_2\cdot\left(-x^2+2x\right)+\alpha_3\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\to$$

$$\to a_0+a_1x+a_2x^2=(\alpha_1)+\left(-\frac{3}{2}\alpha_1+2\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3\right)x+\left(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3\right)x^2$$

Por lo tanto, ecuaciones:

$$\begin{cases}\boxed{\alpha_1=a_0} & \text{I}\\ -\frac{3}{2}\alpha_1+2\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3=a_1 & \text{II}\\ \frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3=a_2 & \text{III}\end{cases}$$

I en II $\to -\frac{3}{2}a_0+2\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3=a_1\to\alpha_2=\left(a_1+\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}\alpha_3\right)\cdot\frac{1}{2}\to$

$$\to\alpha_2=\frac{a_1}{2}+\frac{3}{4}a_0+\frac{1}{4}\alpha_3 \quad \text{IV}$$

I y IV en III $\to\frac{1}{2}a_0-\frac{a_1}{2}-\frac{3}{4}a_0-\frac{1}{4}\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_3=a_2\to$

$$\to-\frac{1}{4}a_0-\frac{a_1}{2}+\frac{1}{4}\alpha_3=a_2\to\alpha_3=\left(a_2+\frac{1}{4}a_0+\frac{a_1}{2}\right)\cdot 4\to$$

$$\to\boxed{\alpha_3=4a_2+a_0+2a_1}\quad \text{V}$$

V en IV $\to\alpha_2=\frac{a_1}{2}+\frac{3}{4}a_0+\frac{1}{4}\left(4a_2+a_0+2a_1\right)\to$

$$\to\alpha_2=\frac{a_1}{2}+\frac{3}{4}a_0+a_2+\frac{a_0}{4}+\frac{a_1}{2}\to\boxed{\alpha_2=a_0+a_1+a_2}$$

Por lo tanto reordenándolos:

$$[P]_B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0+a_1+a_2 \\ a_0+2a_1+4a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{bmatrix}$$ ✓

c) Quiero hallar $[\underbrace{x^2-x+1}_{P(x)}]_B$. Escribo $P(x)$ como CL de B.

~~$x^2-x+1 = \alpha_1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+1\right)+\alpha_2(-x^2+2x)+\alpha_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)$~~

~~$\to x^2-x+1=$~~

Como en 6) hallé el vector de coordenadas para CUALQUIER $P(x)$ de $\mathbb{R}_2[x]$

y como $x^2-x+1 = 1-x+x^2 = \underbrace{a_0}_{1} + \underbrace{a_1}_{-1}x + \underbrace{a_2}_{1}x^2$, entonces:

$$\underbrace{[P]_B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0+a_1+a_2 \\ a_0+2a_1+4a_2 \end{bmatrix}}_{\text{Hallado en 6)}} \to \boxed{[x^2-x+1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}$$